Werkcollegedocent (omcirkelen): Maint Berkenbosch / Remke Kloosterman / Jun Hoo

Geef voor al je antwoorden een korte verklaring.

Neem de matrix $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & a & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ en vector $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Opgave 1: Laat zien dat A inverteerbaar is voor $a \neq -5\frac{9}{16}$. $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ voor $a \neq -5\frac{9}{16}$

Schoonvegen levert:

(2) (geen ruimte hier om volledig op te schrijven) ← z.o.z.

$$\det(A) = -\det\begin{pmatrix} -44\frac{1}{2}-8a & 1 & a+4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\left(-44\tfrac{1}{2}-8a\right)\cdot 2 \cdot 1 \cdot -1 = -89-16a$$

$-89-16a=0 \rightarrow a = -\frac{89}{16} = -5\frac{9}{16} \Leftrightarrow \det(A)=0$, en $a \neq -5\frac{9}{16} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Opgave 2: Als x een eigenvector is van A, wat is a, en wat is de bijbehorende eigenwaarde?

$$L_A(x) = \begin{pmatrix} -4 & 1 & a & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+2+3a+4 \\ -1+4+3+4 \\ 1+0+6+8 \\ -1+0-3+24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3a \\ 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = x' \rightarrow \lambda = 5$$

(2) $x'_1 = 2+3a = \lambda x_1 = 5 \cdot 1 = 5 \rightarrow a = \frac{5-2}{3} = 1$

Opgave 3: Welke van de volgende polynomen is het karakteristieke polynoom $p(\lambda)$ van A (één antwoord is goed)? Geef ook aan waaraan je dat ziet.

~~a)~~ $-\lambda^4 + 6\lambda^3 - 8\lambda^2 + (10a+81)\lambda - 89 - 16a$
~~b)~~ $\lambda^4 - 6\lambda^3 - 8\lambda^2 + (10a+81)\lambda - 89 + 16a$
~~c)~~ $\lambda^4 - (89+16a)\lambda^3 - 8\lambda^2 + (10a+81)\lambda - 6$
~~d)~~ $-\lambda^4 - 6\lambda^3 - 8\lambda^2 + (10a+81)\lambda + 6$
e) $\lambda^4 - 6\lambda^3 - 8\lambda^2 + (10a+81)\lambda - 89 - 16a$
~~f)~~ $-\lambda^4 - (89-16a)\lambda^3 - 8\lambda^2 + (10a+81)\lambda - 6a$

De kopcoëfficiënt is $(-1)^n = (-1)^4 = 1$ dus a, d en f vallen af. Vanwege opgave 2 moet $\lambda = 5$ een oplossing zijn voor $a=1$. Hierdoor vallen b $(=57)$ en c $(=-12251)$ af en blijft e $(=0)$ over.

Opgave 4: Diagonaliseer: $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}$.

$$f_A(t) = \det(A - tI) = \det\left(\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -10 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 7-t & 3 \\ -10 & -4-t \end{pmatrix} = (7-t)(-4-t)+30$$

$$= t^2 - 3t - 28 + 30 = t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2) = 0$$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 2$

$\text{diagonalisatie}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Schoonvegen bij opgave 1:

$$\det\begin{pmatrix} -4 & 1 & a & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \underset{\substack{r_3 \to r_3 + r_4 \\ r_2 \to r_2 - r_4}}{=} \det\begin{pmatrix} -4 & 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \underset{k_3 \to k_3 - k_1}{=} \det\begin{pmatrix} -4 & 1 & a+4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \underset{k_4 \to k_4 - 8k_3 + 10\frac{1}{2}k_2 + 6k_1}{=} \det\begin{pmatrix} -4 & 1 & a+4 & -44\frac{1}{2} - 8a \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{k_1 \rightleftarrows k_4}{=} -\det\begin{pmatrix} -44\frac{1}{2} - 8a & 1 & a+4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$